ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ.

$$y_1' = y_1 + 2y_2 \quad , \quad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2 \quad , \quad y_2(0) = -4$$

ΛΥΣΗ

$$y_1'' = y_1' + 2y_2' = y_1 + 2y_2 + 6y_1 + 4y_2 = 7y_1 + 6y_2$$

Άρα,
$$\left.\begin{aligned} y_1'' &= 7y_1 + 6y_2 \\ y_1' &= 1\cdot y_1 + 2y_2 \end{aligned}\right| _{(-3)} \Rightarrow y_1'' - 3y_1' = 4y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Δ.Ε. ομογ. γραμ. β' τάξ.} \\ \text{με σταθ. συντελεστές} \end{array} \right\}$$

Χαρ. πολ.

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -1$$

Άρα, για την y_1, έχουμε γενική λύση:

$$y_1(x) = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{x} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Όσο, για την y_2, αντικαθιστώντας την y_1, έχουμε:

$$y_1' = y_1 + 2y_2 \Rightarrow 4C_1 \cdot e^{4x} + \cancel{C_2 e^{x}} = C_1 \cdot e^{4x} + \cancel{C_2 e^{x}} + 2y_2$$
$$\Rightarrow 3 \cdot C_1 \cdot e^{4x} = 2y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{3}{2} C_1 \cdot e^{4x} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_1 = -C_2}$$

$$y_1'(0) = y_1(0) + 2y_2(0) = -8 \Rightarrow 4C_1 + C_2 = -8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4C_2 + C_2 = -8 \Rightarrow 5C_2 = -8 \Rightarrow C_2 = -\frac{8}{5}$$

Άρα, $C_1 = \frac{8}{5}$

Συνεπώς,

$$y_1(x) = \frac{8}{5} e^{4x} - \frac{8}{5} \cdot e^{-x} \quad \& \quad y_2(x) = \frac{12}{5} \cdot e^{4x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Να επιλυθεί το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_3' = -3y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$y_1'' = y_1' - y_2' - y_3' = (y_1 - y_2 - y_3) - (y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3) =$$

$$= 3y_1 - 5y_2 - y_3 \Rightarrow \boxed{y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3}$$

$$y_1''' = 3y_1' - 5y_2' - y_3' = 3(y_1 - y_2 - y_3) - 5(y_1 + 3y_2 + y_3) - (-3y_1 + y_2 - y_3) =$$

$$= y_1 - 19y_2 - 7y_3 \Rightarrow \boxed{y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3}$$

Έτσι, απαλοίφοντας το y_3 έχουμε:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \\ y_1''' = y_1 - 19y_2 - 7y_3 \end{cases} \Bigg| \ (-1), (-7) \ (+) \ (+) \Rightarrow \begin{cases} y_1'' - y_1' = 2y_1 - 4y_2 \\ y_1''' - 7y_1' = -6y_1 - 12y_2 \end{cases} \Bigg| \ (-3) \ (+) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1''' - 7y_1' - 3y_1'' + 3y_1' + 12y_1 = 0 \Rightarrow y_1''' - 3y_1'' - 4y_1' + 12y_1 = 0$$

Πρόκειται για μια ομογενή γ.δ.ε γ' τάξης με σταθ. συντελεστές.

Χαρ. πολ.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) - 4(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 4)(\lambda - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 3 \longleftarrow \text{Διακεκριμένες}$$

Άρα,

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cdot c_1\cdot e^{3x} + 2c_2\cdot e^{2x} - 2c_3\cdot e^{-2x} = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{2x} - c_3\cdot e^{-2x} - y_2 - y_3$

$\Rightarrow y_2 + y_3 = -2c_1\cdot e^{3x} - c_2\cdot e^{2x} + c_3\cdot e^{-2x} \quad (1)$

$y_1'' = 3y_1 - 5y_2 - y_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\cdot c_1\cdot e^{3x} + 4c_2\cdot e^{2x} + 2c_3\cdot e^{-2x} = 3c_1\cdot e^{3x} + 3c_2\cdot e^{3x} - 3c_3\cdot e^{-2x} - 5y_2 - y_3$

$\Rightarrow 5y_2 + y_3 = -6\cdot c_1\cdot e^{3x} - c_2\cdot e^{2x} - 5c_3\cdot e^{-2x} \quad (2)$

Πολ/ζουμε την (1) με το -1 και προσθετουμε στη (2).

$4y_2 = -4c_1\cdot e^{3x} - 6c_3\cdot e^{-2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_2(x) = -c_1\cdot e^{3x} - \frac{3}{2}c_3\cdot e^{-2x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Στην 1η εξίσωση του συστήματος αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ που υπολογίσαμε προηγουμένως. Άρα,

$y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \Rightarrow y_3 = y_1 - y_2 - y_1' \Rightarrow$

$\Rightarrow y_3(x) = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{2x} + c_3\cdot e^{-2x} + c_1\cdot e^{3x} + \frac{3}{2}c_3\cdot e^{-2x} - 3c_1\cdot e^{3x} - 2c_2\cdot e^{2x} - 2c_3\cdot e^{-2x}$

$\Rightarrow y_3(x) = -c_1\cdot e^{3x} - c_2\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}c_3\cdot e^{-2x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$

3) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^x \end{cases} \quad \Big\| \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

ΛΥΣΗ

$y_1'' = 3y_1' - 4y_2' + e^x =$

$= 9y_1 - 12y_2 + 3\cdot e^x - 4y_1 + 4y_2 - 4e^x + e^x =$

$= 5y_1 - 8y_2$

Έτσι, έχουμε:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 + e^x \\ y_1'' = 5y_1 - 8y_2 \end{cases} \begin{matrix} (-2) \\ (+) \end{matrix} \Rightarrow y_1'' - 2y_1' = -y_1 - 2e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1'' - 2y_1' + y_1 = -2e^x \leftarrow \text{Μη ομογ. με σταθ. συντελ.}$$

Έστω η ομογενής

(E_0): $y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0 \xRightarrow{\text{χ.π}} \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, πολ/τας 2

$\tilde{y}_1(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Αλλά, πρέπει να υπολογίσουμε και μια (μερική) λύση της μή ομογενούς (Ε).

$$W(e^x, xe^x) = \det \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} = e^{2x} > 0$$

$$W_1(e^x, xe^x) = \det \begin{pmatrix} 0 & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{pmatrix} = xe^x$$

$$W_2(e^x, xe^x) = \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x$$

$$y_\mu^{(1)}(x) = e^x \cdot \int_0^1 \frac{W_1(e^t, te^t)}{W(e^t, te^t)} (-2e^t)\, dt + xe^x \cdot \int_0^1 \frac{W_2(e^t, te^t)}{W(e^t, te^t)} (-2e^t)\, dt$$

$$= e^x \cdot \int_0^1 \frac{te^t}{e^{2t}} \cdot (-2e^t)\, dt + x \cdot e^x \cdot \int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}} (-2e^t)\, dt =$$

$$= e^x \int_0^1 -2t\, dt + xe^x \int_0^1 -2\, dt =$$

$$= e^x \cdot [-t^2]_0^1 + xe^x \cdot [-2t]_0^1 = -e^x - 2xe^x$$

Άρα, $y_1(x) = \tilde{y}_1(x) + y_\mu^{(1)}(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x - e^x - 2xe^x$.

<u>Β' τρόπος</u> $\rightarrow$ για τη μή ομογενή, θέτω $y_1 = z \cdot e^x$

$y_1' = z' \cdot e^x + z \cdot e^x$

$y_1'' = z'' \cdot e^x + 2z' \cdot e^x + z \cdot e^x$

Αντικαθιστώ στην <u>μη</u> ομογενή:

$z'' e^x + \cancel{2z' e^x} + \cancel{z \cdot e^x} - \cancel{2z' e^x} - \cancel{2z e^x} + \cancel{z e^x} = -2 e^x \iff$

$z''_\mu = -2 \Rightarrow z'_\mu = -2x \Rightarrow z_\mu = -x^2$ (οι σταθερές δεν μας ενδιαφέρουν)

άρα $y_1^{(\mu)} = -x^2 \cdot e^x \leftarrow$ μια άλλη μερική λύση

Συνεπώς, $y_1(x) = y_1^{(\mu)}(x) + \tilde{y}_1(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x, \ x \in \mathbb{R}$

όπως, και να έχει ας επιλέξουμε την $2^η$ περίπτωση

Έστω, $y_1(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x e^x - x^2 \cdot e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Αντικαθιστώντας την $y_1(x)$ στην $1^η$ ή στη $2^η$ εξίσωση

Παίρνουμε την λύση $y_2(x)$

Τέλος, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες $y_1(0) = y_2(0) = 1$

και υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 επιλύοντας

ένα σύστημα 2×2.

Μερικές διαφορικές εξισώσεις α' τάξης:

1) Να αποδείξετε ότι εάν $f \in C'(\mathbb{R})$, τότε η συνάρτηση $z(x,y) = e^{y/2x} \cdot f(x \cdot y)$, $x>0$ και $y \in \mathbb{R}$ είναι μία λύση της μερικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:

$$x^2 z_x - xy z_y + y z = 0 \quad , \quad x>0 \text{ και } y \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Εφόσον $f \in C'(\mathbb{R})$ τότε $z \in C'(A)$

όπου $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ και } y \in \mathbb{R}\}$

Άρα, z διαφορίσιμη στο $A \Rightarrow z$ μερικώς διαφορίσιμη στο A

Δηλαδή, $\exists \nabla z(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = e^{y/2x} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{2x}\right) \cdot f(x \cdot y) + e^{y/2x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x \cdot y) \cdot y =$$

$$= e^{y/2x}\left(-\frac{y}{2x^2} \cdot f(x \cdot y) + f'(x \cdot y) \cdot y \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = e^{y/2x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2x}\right) \cdot f(x \cdot y) + e^{y/2x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x \cdot y) \cdot x =$$

$$= e^{y/2x}\left(\frac{1}{2x} f(x \cdot y) + f'(x \cdot y) \cdot x \right)$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$$x^2 \cdot e^{y/2x}\left(-\frac{y}{2x^2} f(x \cdot y) + f'(x \cdot y) y \right) - xy \cdot e^{y/2x}\left(\frac{1}{2x} f(x \cdot y) + f'(xy) x \right) + y e^{y/2x} \cdot f(x \cdot y) =$$

$$= e^{y/2x}\left(-\cancel{\frac{y}{2} f(x \cdot y)} + \cancel{x^2 y f'(xy)} - \cancel{\frac{y}{2} f(x \cdot y)} - \cancel{x^2 y f'(xy)} + \cancel{y f(x \cdot y)} \right) =$$

$= 0$. Άρα, πράγματι η z αποτελεί λύση της εξίσωσης

2) Ας είναι $\underline{\Omega} = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$

ΝΔΟ η συνάρτηση

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2, & x>0 \wedge y>0 \\ 0, & (x,y) \in \underline{\Omega} \setminus \{(x,y) : x>0 \wedge y>0\} \end{cases}$$

Είναι μία λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_y = 0, \quad \forall (x,y) \in \underline{\Omega}$$

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να εξετάσουμε εαν η $z(x,y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Δηλ. θα πρέπει να εξετάσουμε εαν πρώτα απο όλα $\exists \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ και εαν ναι θα πρέπει αυτές να είναι συνεχείς στο στο 0.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{z(x,0)-z(0,0)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \\ \lim_{y\to 0} \frac{z(0,y)-z(0,0)}{y} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \exists \nabla z(x,y).$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\partial z}{\partial x} &= \lim_{x\to 0} 2x = 0 \\ \lim_{y\to 0} \frac{\partial z}{\partial y} &= \lim_{x\to 0} 0 = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = \nabla f(0,0)$$

$$z_y = \frac{dz}{dy} = 0, \quad \forall (x,y) \in \underline{\Omega}$$

3) Να επιλυθούν οι μερικές διαφορικές εξισώσεις

i. $z_x + z = x \cdot y$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

ii. $z_x - (x-y)z = x^2 \cdot y$, $x>1$ και $y \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για δυο μερικές (ως προς x) γραμμικές Δ.Ε α' τάξης. Η μέθοδος επίλυσης τους είναι παρόμοια με αυτήν στις συνήθεις γραμμικές Δ.Ε α' τάξης, με μόνη διαφορά ότι παίζει ρόλο ως προς ποια μεταβλητή ολοκληρώνουμε.

i. $z_x + z = x \cdot y \Rightarrow z_x \cdot e^{\int_0^x dt} + z \cdot e^{\int_0^x dt} = x \cdot y \cdot e^{\int_0^x dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(z \cdot e^{\int_0^x dt}\right) = x \cdot y \cdot e^{\int_0^x dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot e^{\int_0^x dt} = z(0,y) + \int_0^x s \cdot y \cdot e^{\int_0^s dt} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{-\int_0^x dt}\left(z(0,y) + \int_0^x s \cdot y \cdot e^{\int_0^s dt} ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{-x} \cdot \left(z(0,y) + y \cdot \int_0^x s \cdot e^s ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{-x} \cdot \left(z(0,y) + y \cdot (x \cdot e^x - e^x + 1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{-x} \cdot z(0,y) + yx - y + \frac{y}{e^x} , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ii. $z_x - (x-y)z = x^2 \cdot y \Rightarrow z_x \cdot e^{-\int_1^x (t-y)dt} - (x-y) \cdot z \cdot e^{-\int_1^x (t-y)dt} = x^2 \cdot y \cdot e^{-\int_1^x (t-y)dt}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(z \cdot e^{-\int_1^x (t-y)dt}\right) = x^2 \cdot y \cdot e^{-\int_1^x (t-y)dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{\int_1^x (t-y)dt} \cdot \left(z(1,y) + \int_1^x s^2 \cdot y \cdot e^{-\int_1^s (t-y)dt} ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = e^{\left(\frac{x^2}{2} - yx - \frac{1}{2} + y\right)} \cdot \left(z(1,y) + y \cdot \int_1^x s^2 \cdot e^{\left(y \cdot s - \frac{s^2}{2} - y + \frac{1}{2}\right)} ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = \ldots \quad \forall x>1 \text{ και } y \in \mathbb{R}$$

4) Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$k \cdot z_x + \lambda z_y + \mu \cdot z = 0 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ΛΥΣΗ

Σκοπός μας είναι να την αναγάγουμε σε μία διαφορική μερική γραμμική εξίσωση α' τάξης (όπως προηγουμένως)

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{\lambda}$ δίνονται από τον τύπο:

$ky - \lambda x = d$, d: αυθ. σταθ.

Εκτελώντας το μετασχηματισμό

$\xi = x$ και $\eta = ky - \lambda x$.

• $$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = z_\xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_x = z_\xi \cdot 1 + z_\eta(-\lambda) = z_\xi - \lambda \cdot z_\eta$$

• $$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = z_\xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + z_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_y = z_\xi \cdot 0 + z_\eta \cdot k = k z_\eta$$

Άρα στην ομογενή:

$$k \cdot (z_\xi - \lambda z_\eta) + \lambda \cdot (k \cdot z_\eta) + \mu z = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad k \cdot z_\xi + \mu z = 0 \quad \leftarrow$ Μερική Δ.Ε. γραμμική α' τάξης

$$\Rightarrow z(x,y) = z(0, \overbrace{ky - \lambda x}^{\eta}) \cdot e^{-\frac{\mu}{k}x}$$

5) Να επιλυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$y\cdot z_x - x z_y + y^3\cdot xz = 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και $y>0$

ΛΥΣΗ

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (επιλύουμε τη διαφορική χωριζ. μεταβλ.)

δίνονται από τον τύπο

$x\cdot x + y\cdot y = d \Rightarrow x^2+y^2 = d$

Θεωρώντας το μετασχηματισμό

$\xi = x$ και $\eta = x^2+y^2$

Έχουμε:

- $z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = z_\xi\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = z_\xi\cdot 1 + z_\eta\cdot(2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_x = z_\xi + 2x\cdot z_\eta$

- $z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = z_\xi\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + z_\eta\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = z_\xi\cdot 0 + z_\eta\cdot(2y) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_y = 2y\cdot z_\eta$

Αντικαθιστώντας στην ομογενή:

$y\cdot(z_\xi + 2x z_\eta) - x(2y z_\eta) + y^3\cdot xz = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y\cdot z_\xi + y^3\cdot xz = 0$ ← Μερική γραμμική α' τάξης

$\overset{y>0}{\Rightarrow} z_\xi + y^2\cdot xz = 0 \Rightarrow z_\xi + (\eta-\xi)^2\cdot\xi z = 0$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\eta>0$

$\Rightarrow z(\xi,\eta) = z(0,\eta)\cdot e^{-\int_0^\xi t(\eta-t^2)\,dt} = z(0,\eta)\cdot e^{((\xi^4-2\xi^2\eta)/4)}$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\eta>0$

Άρα, $z(x,y) = z(0,x^2+y^2)\cdot e^{((-x^2(x^2+y^2)/4)}$, $x\in\mathbb{R}$, $y>0$

sos 6) Ας είναι συνάρτηση

$$z(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

ΝΔΟ η z ασυνεχής στο $(0,0)$ αλλά τέτοια ώστε: $x z_x + y z_y = 0$

ΛΥΣΗ

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ Εξετάζουμε εάν υπάρχει το όριο

Επιλέγουμε τις ακολουθίες

- $\left(\frac{1}{\nu},0\right)\xrightarrow{\nu\to\infty}0 \Rightarrow z\left(\frac{1}{\nu},0\right)=0$
- $\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)\xrightarrow{\nu\to\infty}0 \Rightarrow z\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)=\frac{1/\nu^2}{2/\nu^2}=\frac{1}{2}$

$\Big\}\ \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y)$

Άρα, η z ασυνεχής στο σημείο $(x_0,y_0)=(0,0)$

Έπειτα, αυτό δεν αρκεί για να βγάλουμε συμπέρασμα για τη μερική διαφορισιμότητα. Έτσι, υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Λόγω συμμετρίας στον τύπο της z, όμοια προκύπτει:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$$

Εξετάζουμε, στο $(x_0,y_0)=(0,0)$ για τη μερική διαφορισιμότητα:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=0=\lim_{y\to0}\frac{z(0,y)-z(0,0)}{y}=\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$$

Άρα, z είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $(0,0)$

Τώρα, θα πρέπει (σύμφωνα με την εκφώνηση) να δείξουμε ότι είναι και συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$

(γενικώς στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη, αφού οι απεικονίσεις $(x,y)\mapsto x$ και $(x,y)\mapsto y$

Είναι γνωστό ότι είναι συνεχείς και έτσι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ ως πηλίκα συνεχών)

Αρκεί νδο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y}$$

(Δηλ. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = \nabla f(0,0)$).

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{\overset{\text{πολικές}}{=}} \quad \begin{pmatrix} r\geq 0 \\ 0\leq\varphi<2\pi \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \sin^3\varphi - r^2\cos^2\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^4} = \lim_{r\to 0} (\sin^3\varphi - \cos^2\varphi\cdot\sin\varphi) r^2 = 0$$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2} \overset{\text{πολικές}}{=}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^3\varphi - r^2 \sin^2\varphi \cdot r\cos\varphi}{r^4} = \lim_{r\to 0} (\cos^3\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi) r^2 = 0$$

Άρα, η z συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Έτσι, έχει νόημα να μελετήσουμε τη Δ.Ε

$$x\cdot z_x + y z_y = 0.$$

Η εξίσωση

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ έχει λύσεις όπου δίνονται από τον τύπο

$$x\,dy = y\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \log|y| - \log|x| = d, \quad d: \text{σταθ}$$

Θέτω $\begin{matrix} \xi = x \\ \eta = \log|y| - \log|x| \end{matrix} \Bigg| \begin{matrix} z_x = z_\xi - \frac{1}{x}\cdot z_\eta \\ z_y = \frac{1}{y} z_\eta \end{matrix} \Bigg\}$ Αντικαθιστώντας $\longrightarrow$

$$\longrightarrow x\cdot\left(z_\xi - \frac{1}{x} z_\eta\right) + y\,\frac{1}{y} z_\eta = 0 \Rightarrow x\cdot z_\xi = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} z = z(0,\eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,y) = z(0, \log|y| - \log|x|)$$

7) Να βρεθεί η λύση z της μερικής διαφορικής εξίσωσης
$xy \cdot z_x - y^2 \cdot z_y - xz = 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$
όπου πληροί τη συνθήκη
$z(x,1) = x^2$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οι λύσεις της Δ.Ε δίνονται από τον τύπο (1).

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{xy}{y^2} \Rightarrow y^2 dx + x \cdot y\, dy = 0 \quad \text{ομογενής Δ.Ε}$$

Επιλύοντας, την προηγούμενη έχω

$d = x \cdot y$, d: αυθ. σταθερά.

Θέτω, $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} z_x = z_\xi \cdot y \\ z_y = z_\xi \cdot x + z_\eta \end{matrix}\right\}$ Αντικαθιστούμε $\longrightarrow$

$\longrightarrow \cancel{xy \cdot z_\xi \cdot y} - \cancel{y^2 \cdot z_\xi \cdot x} - y^2 \cdot z_\eta - x \cdot z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 \cdot z_\eta + x z = 0 \Rightarrow \left(\xi = xy \Rightarrow x = \frac{\xi}{y}\right)$

$\Rightarrow y^2 z_\eta + \frac{\xi}{y} z = 0 \Rightarrow y^3 \cdot z_\eta + \xi z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta^3 \cdot z_\eta + \xi \cdot z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z(\xi,\eta) = z(0,\xi) \cdot e^{-\int_1^\eta \xi / t^3 \, dt} = z(0,\xi) \cdot e^{\left(\xi/2\eta^2 - \xi/2\right)}$, $\eta > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$

Άρα, θεωρώντας $Z_1(0,\xi) = z(0,\xi) \cdot e^{-\xi/2}$ μια αυθαίρετα συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση έχουμε:

$z(\xi,\eta) = Z_1(0,\xi) \cdot e^{\xi/2\eta^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta > 0$

Άρα, $z(x,y) = Z_1(0,xy) \cdot e^{x/2y}$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

Τώρα, επειδή $z(x,1) = x^2 \Rightarrow Z_1(0,x) \cdot e^{x/2} = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_1(0,x) = x^2 \cdot e^{-x/2}$, συνεπώς και η ζητούμενη λύση θα είναι: $z(x,y) = x^2 \cdot y^2 \cdot e^{(x/2y - xy/2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$

αφού $Z_1(0,xy) = x^2 \cdot y^2 \cdot e^{-xy/2}$!!!